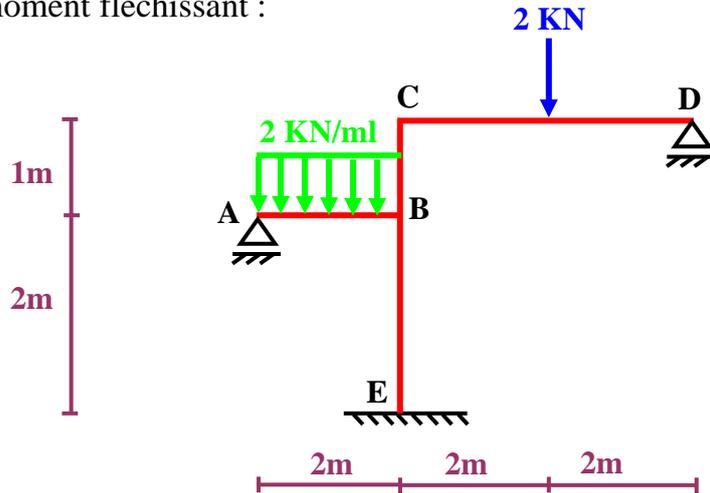


Exercice 02 :

Soit le portique illustré. Tracer le diagramme de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant :



Les équations d'équilibre sont au nombre de 3. Les réactions d'appuis sont au nombre de 5. $5-3 = 2$.
 Donc, il reste deux inconnus quand ne peut pas déterminer.

Solution :

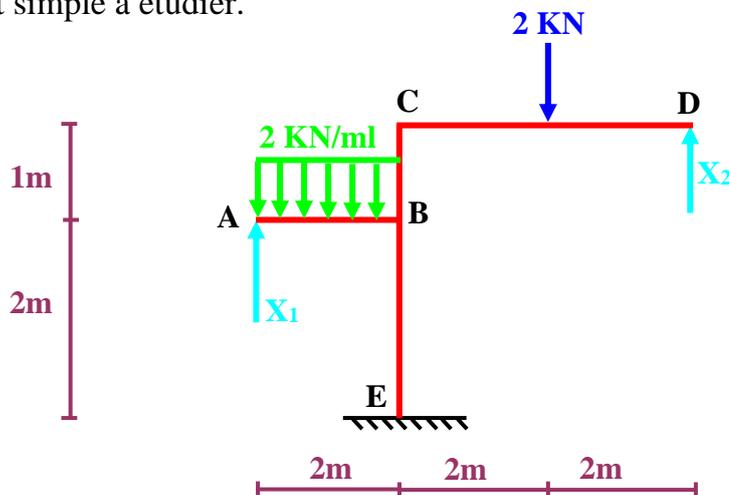
1-Le degré d'hyperstaticité du système est

$$H = 3C - A - 2S = 3(2) - 2(2) = 2$$

Donc, on a deux inconnues hyperstatiques à déterminer.

2-Le choix d'un système de base

Il faut choisir l'emplacement des inconnues à ce que le système soit toujours stable et simple à étudier.



3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement interne (M_P)

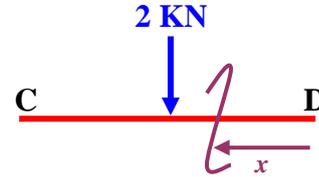
Barre CD :

$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = 0$$

$$2 \leq x < 4m$$

$$M(x) = -2(x-2) \begin{cases} M(2) = 0 \\ M(4) = -4KN.m \end{cases}$$

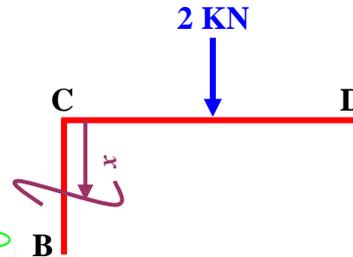


Poteau CB :

$$0 \leq x < 1m$$

$$M(x) = -2 \times 2 = -4KN.m$$

On ne peut pas aller jusqu'à la fin du poteau (point E) par ce qu'il y a la charge 2KN/ml qui apparait après le point B

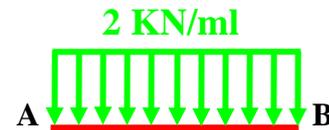


Barre AB :

$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = -x^2 \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(2) = -4KN.m \end{cases}$$

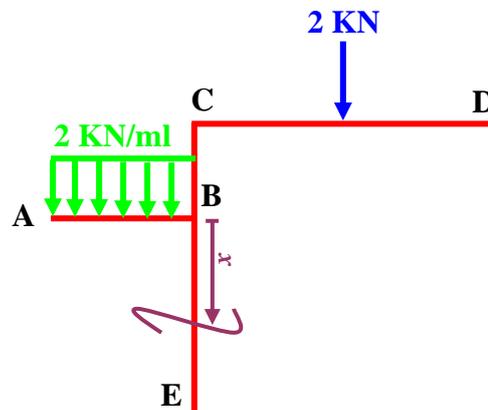
Le calcul de $M(x)$ se fait sur les appuis



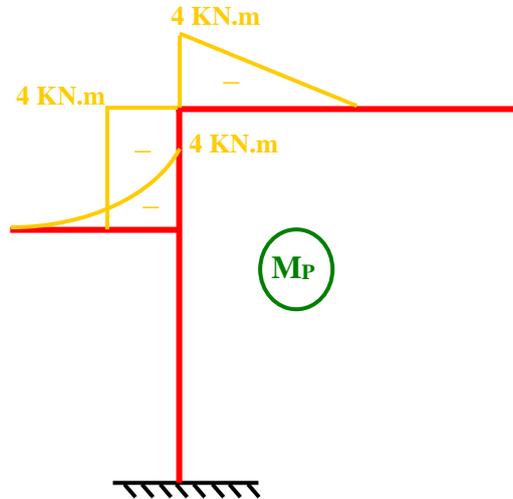
Poteau BE :

$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = -2 \times 2 + 2 \times 2 \times 1 = 0$$



A la fin, le diagramme du moment fléchissant sous chargement externe sera tracé comme suit :



3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement unitaire (M_1 et M_2)

3-1-Le moment fléchissant (M_1) avec une charge égale à 1.

Barre AB :

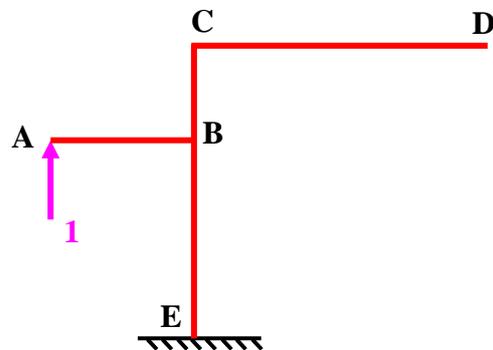
$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = 2KN.m \end{cases}$$

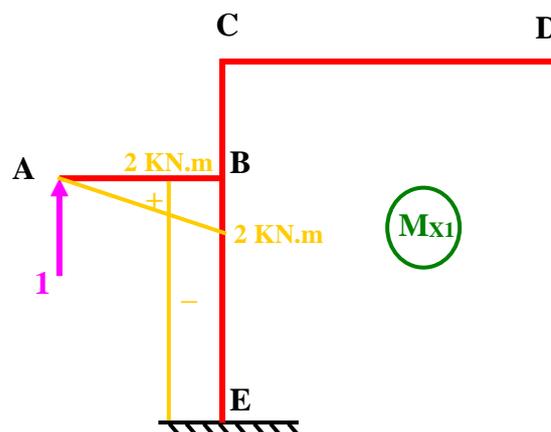
Poteau BE :

$$0 \leq x < 3m$$

$$M(x) = -1 \times 2 = -2KN.m$$



Sous chargement unitaire le diagramme du moment fléchissant « M_1 » est tracé comme suit :



3-2-Le moment fléchissant (M_2) avec une charge égale à 1.

Barre DC :

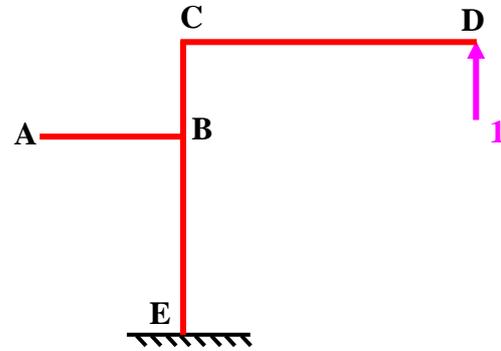
$$0 \leq x < 3m$$

$$M(x) = x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(4) = 4KN.m \end{cases}$$

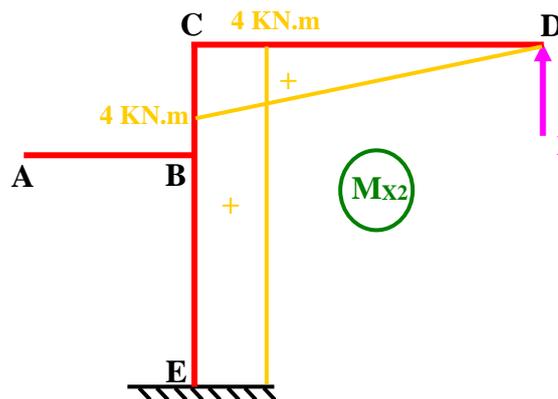
Poteau CE :

$$0 \leq x < 4m$$

$$M(x) = 1 \times 4 = 4KN.m$$



Sous chargement unitaire le diagramme du moment fléchissant « M_2 » est tracé comme suit :



4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\delta_{k\Sigma F}$ »

Le calcul de ces coefficients se fait, selon la règle de Verechtchaguine ou avec la multiplication des formes du diagramme des moments fléchissant (regarder le formulaire des intégrales de Mohr).

Exemple :

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} (\text{la parabole} = 3) \cdot (\text{le triangle} = 4.5) \cdot (\text{la longueur} = 2) \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 \right] = \frac{32}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \right] = \frac{208}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} [4 \cdot (-2) \cdot 2] = \frac{-16}{EI}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} \cdot (-4) \cdot 2 \cdot 2 \right] = \frac{-4}{EI}$$

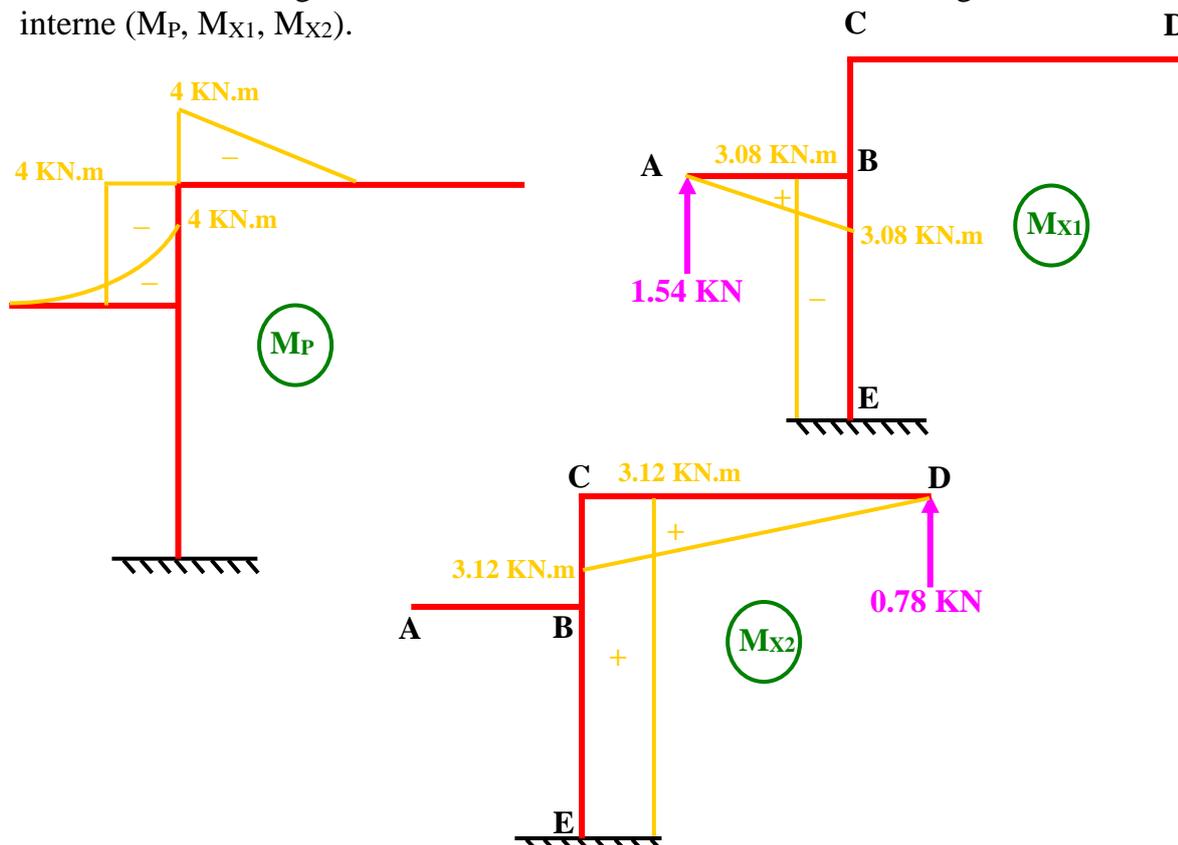
$$\delta_{2P} = \frac{1}{EI} \left[(-4) \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot (-4) \cdot (2 \cdot 4 + 2) \cdot 2 \right] = \frac{-88}{3EI}$$

5-La résolution de l'équation canonique

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32X_1 - 48X_2 - 12 = 0 \\ -48X_1 + 208X_2 - 88 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_1 = 1.54 \text{ KN}; \quad X_2 = 0.78 \text{ KN}$$

6-Le tracé des diagrammes des moments fléchissant sous chargements externe et interne (M_P , M_{X1} , M_{X2}).



7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-1-Détermination des moments aux extrémités

D'après les différents diagrammes en haut :

Au point A : $M_A = 0$

Au point B : Poteau EB ; $M_B = 3.12 - 3.08 = 0.04 \text{ KN.m}$.

Barre AB ; $M_B = 3.08 - 4 = -0.92 \text{ KN.m}$

Poteau CB ; $M_B = 3.12 - 4 = -0.88 \text{ KN.m}$.

Au point E : $M_E = 3.12 - 3.08 = 0.04 \text{ KN.m}$.

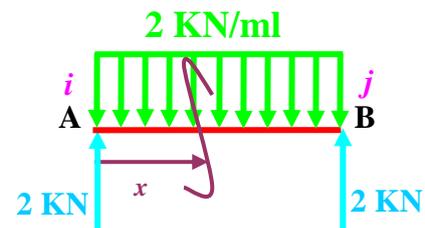
Au point C : $M_C = 3.12 - 4 = -0.88 \text{ KN.m}$.

Au point D : $M_D = 0$

7-2- Etude des différents efforts

D'après la formule générale des moments internes et externes on a trouvés:

$$\begin{cases} T(x) = t(x) + \left(\frac{M_j - M_i}{L} \right) \\ M(x) = m(x) + M_i + \left(\frac{M_j - M_i}{L} \right) x \end{cases}$$



Barre AB :

$$0 \leq x < 2m$$

$$t(x) = 2 - 2x$$

$$m(x) = 2x - x^2$$

$$T(x) = 2 - 2x + \frac{(-0.92) - 0}{2} = 1.54 - 2x \begin{cases} T(0) = 1.54 \text{ KN} \\ T(2) = -2.46 \text{ KN} \\ T(x) = 0 \Rightarrow x = 0.77m \end{cases}$$

$$M(x) = 2x - x^2 + 0 + \left(\frac{(-0.92) - 0}{2} \right) x$$

$$M(x) = 1.54x - x^2 \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(2) = -0.92 \text{ KN.m} \\ M(x) = 0 \Rightarrow x = 1.54m \\ M(0.77) = 0.59 \end{cases}$$

Poteau BC :

$$0 \leq x < 3m$$

$$t(x) = 0$$

$$m(x) = 0$$

$$T(x) = 0 + \left(\frac{-0.88 - (-0.88)}{1} \right) = 0$$

$$M(x) = -0.88 + \left(\frac{-0.88 - (-0.88)}{1} \right) x = -0.88 \text{ KN.m}$$



Barre CD :

$$0 \leq x < 2m$$

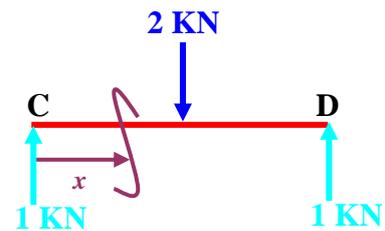
$$t(x) = 1 \text{ KN}$$

$$m(x) = x$$

$$T(x) = 1 + \frac{0 - (-0.88)}{4} = 1.22 \text{ KN}$$

$$M(x) = x + (-0.88) + \left(\frac{0 - (-0.88)}{4} \right) x$$

$$M(x) = 1.22x - 0.88 \begin{cases} M(0) = -0.88 \text{ KN.m} \\ M(2) = 1.56 \text{ KN.m} \\ M(x) = 0 \Rightarrow x = 0.72m \end{cases}$$



Barre CD :

$$2 \leq x < 4m$$

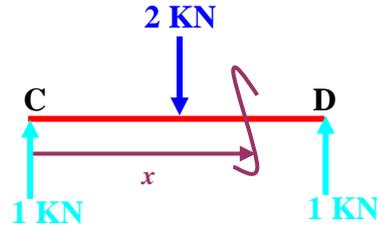
$$t(x) = 1 - 2 = -1 \text{ KN}$$

$$m(x) = x - 2(x - 2)$$

$$T(x) = -1 + \frac{0 - (-0.88)}{4} = -0.78 \text{ KN}$$

$$M(x) = x - 2(x - 2) + (-0.88) + \left(\frac{0 - (-0.88)}{4} \right) x$$

$$M(x) = -0.78x + 3.12 \begin{cases} M(2) = 1.56 \text{ KN.m} \\ M(4) = 0 \text{ KN.m} \end{cases}$$



Poteau BE :

$$0 \leq x < 2m$$

$$t(x) = 0$$

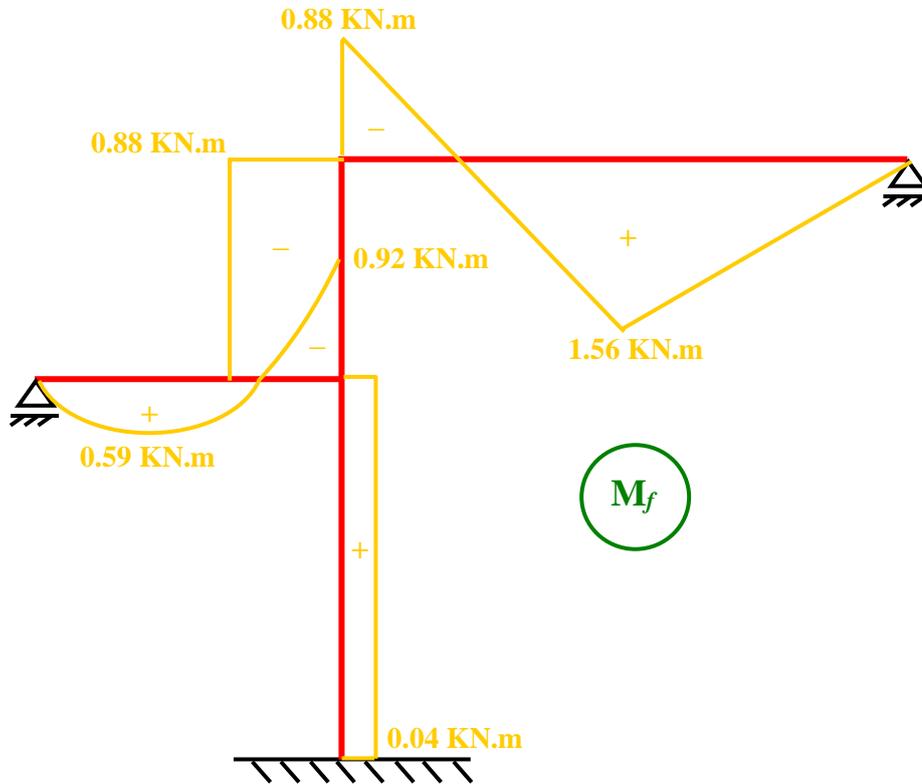
$$m(x) = 0$$

$$T(x) = 0 + \left(\frac{0.04 - 0.04}{2} \right) = 0$$

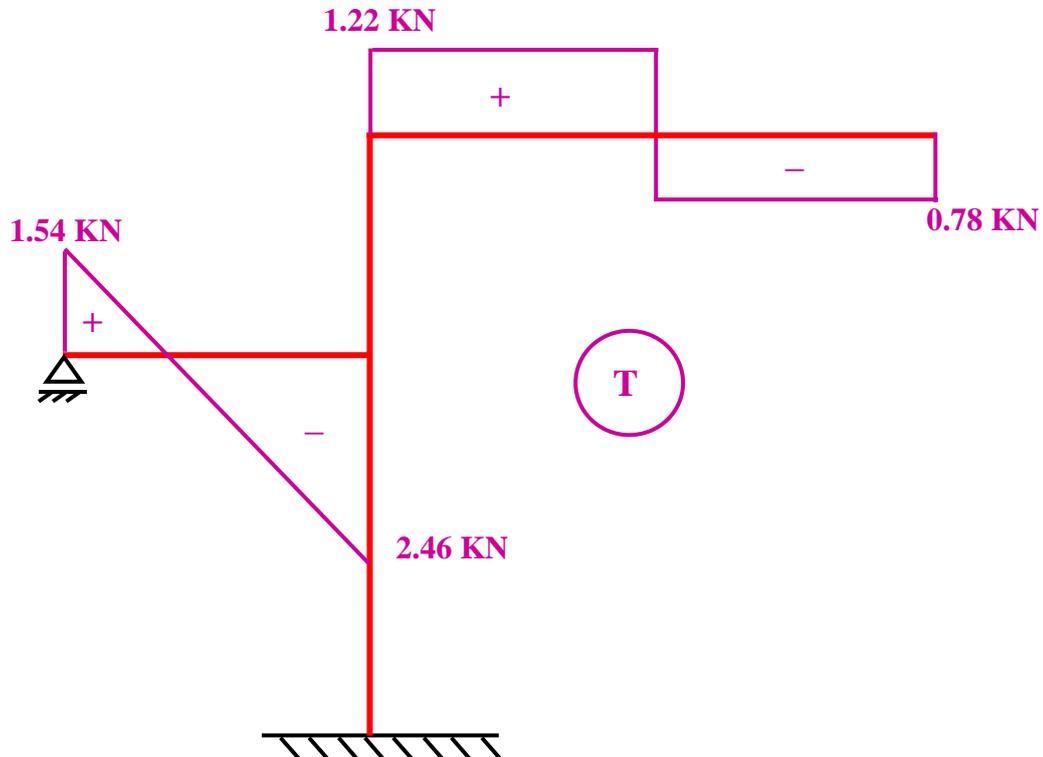
$$M(x) = 0 + 0.04 + \left(\frac{0.04 - 0.04}{2} \right) x = 0.04 \text{ KN.m}$$



*Diagramme du moment fléchissant



*Diagramme de l'effort tranchant



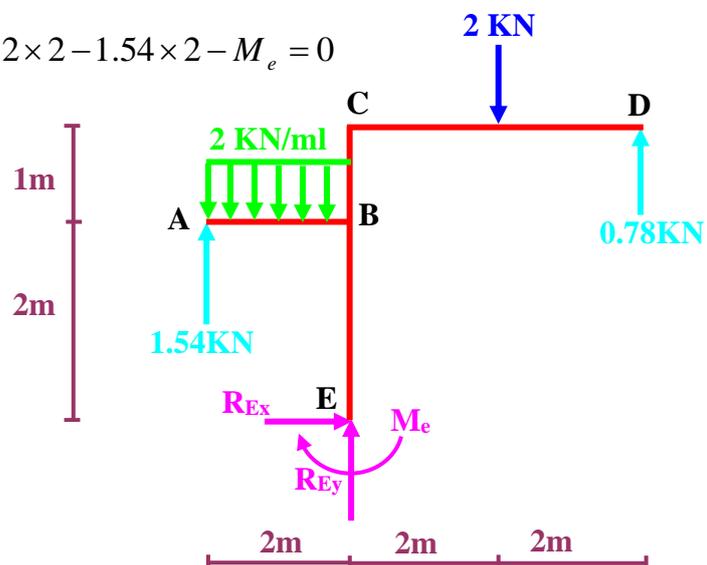
Les réactions à l'encastrement sont

$$\Sigma F_{/x} = 0 \Rightarrow R_{D_x} = 0$$

$$\Sigma F_{/y} = 0 \Rightarrow R_{D_y} = -1.54 - 0.78 + 2 + 2 \times 2 \times 1 = 3.68 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{/D} = 0 \Rightarrow 0.78 \times 4 + 2 \times 2 \times 1 - 2 \times 2 - 1.54 \times 2 - M_e = 0$$

$$\Rightarrow M_e = 0.04 \text{ kN.m}$$



*Diagramme de l'effort normal

Suivant l'équilibre des nœuds « C » et « B » on trouve

Nœud C :

$$N_{CD} = 0$$

$$N_{CB} = -1.22 \text{ KN}$$

Nœud B :

$$N_{BA} = 0$$

$$N_{BE} = -2.46 + N_{CB} = -3.68 \text{ KN}$$

