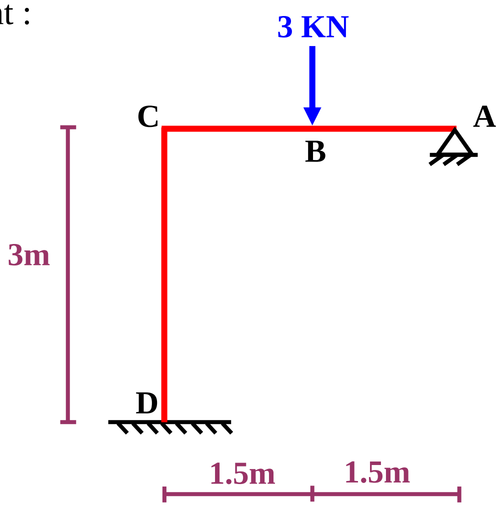
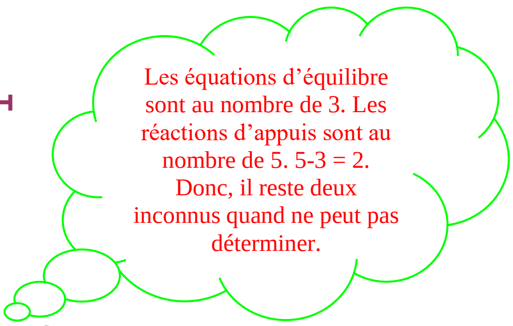
Exercice 01 :

Soit le portique illustré. Tracer le diagramme de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant :





Solution :

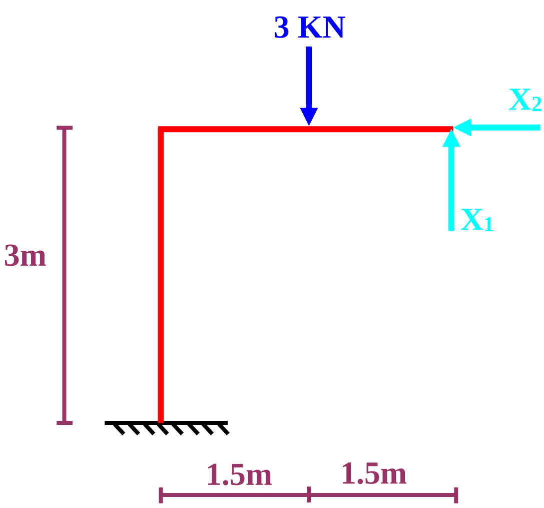
1-Le degré d'hyperstaticité du système est

$$H = 3C- A-2S = 3(1) -1 = 2$$

Donc, on a deux inconnues hyperstatiques à déterminer.

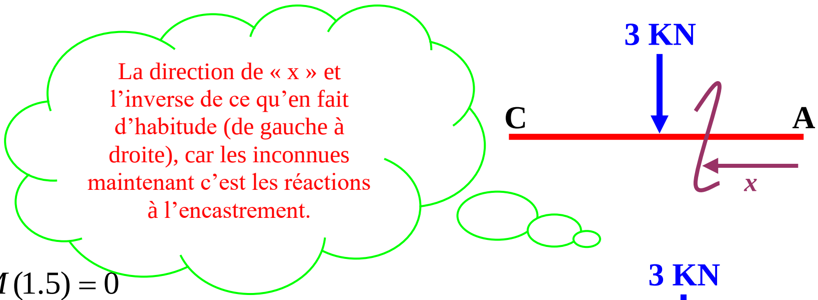
2-Le choix d'un système de base

Il faut choisir l'emplacement des inconnues à ce que le système soit toujours stable et simple à étudier.



3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement interne (M_P)

Barre AC :

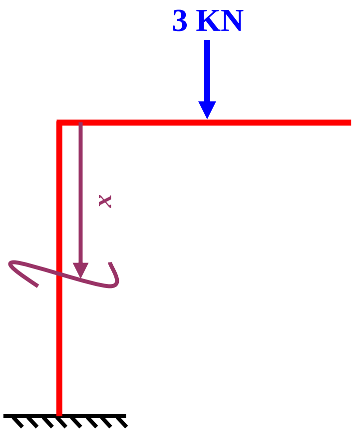


$0 \le x < 1.5m$

$M(x) = 0$

$1.5 \le x < 3m$

$$M(x) = -3(x-1.5)\begin{cases} M(1.5) = 0 \\ M(3) = -4.5KN.m \end{cases}$$

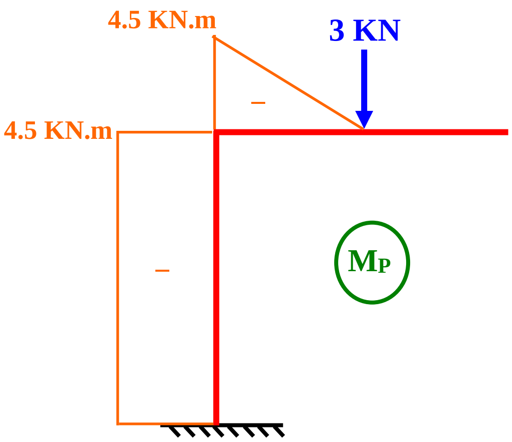


Poteau CD :

$0 \le x < 3m$

$M(x) = -3 \times 1.5 = -4.5KN.m$

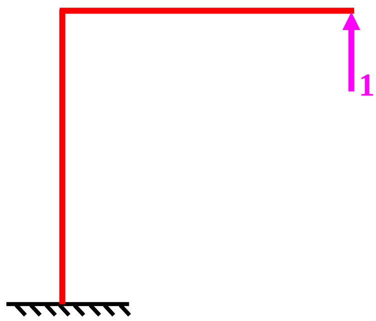
A la fin, le diagramme du moment fléchissant sous chargement externe sera tracé comme suit :



3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement unitaire (M_1 et M_2)

3-1-Le moment fléchissant (M_1) avec une charge égale à 1.

Barre AC :



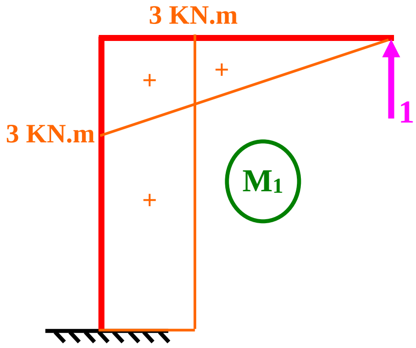
$0 \le x < 3m$

$$M(x) = x\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = 3KN.m \end{cases}$$

Poteau CD :

$$0 \le x < 3m$$
$$M(x) = 3KN.m$$

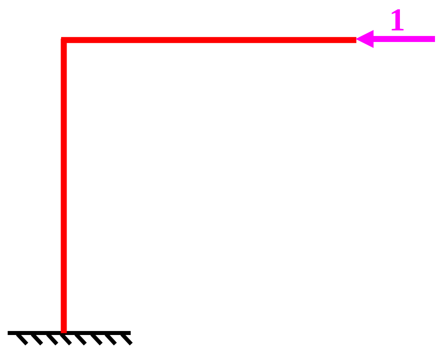
Sous chargement unitaire le diagramme du moment fléchissant « M_1 » est tracé comme suit :



3-2-Le moment fléchissant (M_2) avec une charge égale à 1.

Barre AC :

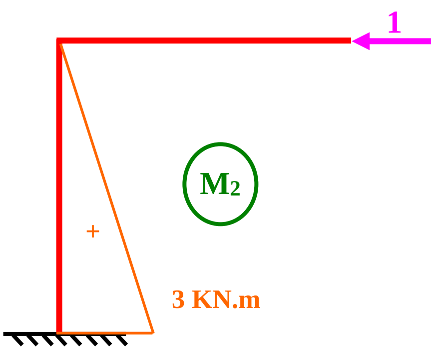
$$0 \le x < 3m$$
$$M(x) = 0$$



Poteau CD :

$$0 \le x < 3m$$
$$M(x) = x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(x) = 3KN.m \end{cases}$$

Sous chargement unitaire le diagramme du moment fléchissant « M_2 » est tracé comme suit :



4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\delta_{k\Sigma F}$ »

Le calcul de ces coefficients ce fait, selon la règle de Verechtchaguine ou avec la multiplication des formes du diagramme des moments fléchissant (regarder le formulaire des intégrales de Mohr).

Exemple :

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}(le\ triangle = 4.5).(le\ trapèze = 2.3+1.5).(la\ longueur = 3)\right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}.3.3.3 + 3.3.3\right] = \frac{36}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}.3.3.3\right] = \frac{9}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}.3.3.3\right] = \frac{13.5}{EI}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}.(-4.5).(2.3+1.5).1.5 + 3.(-4.5).3\right] = \frac{-48.94}{EI}$$

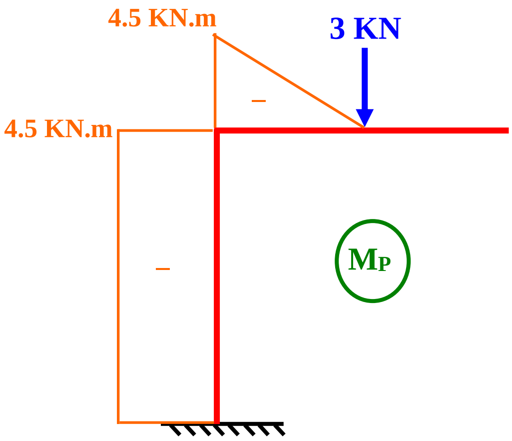
$$\delta_{2P} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}.3.(-4.5).3\right] = \frac{-20.25}{EI}$$

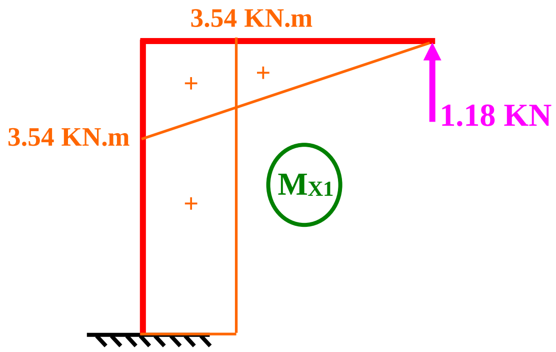
5-La résolution de l'équation canonique

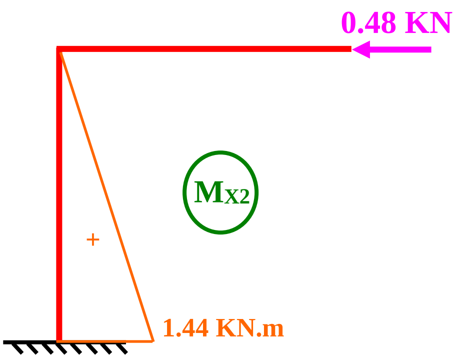
$$\begin{cases}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}36X_1 + 13.5X_2 - 48.94 = 0 \\ 13.5X_1 + 9X_2 - 20.25 = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow X_1 = 1.18KN; \quad X_2 = 0.48KN$$

6-Le tracé des diagrammes des moments fléchissant sous chargements externe et interne (M_P, M_{X1}, M_{X2}).







7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-1-Détermination des moments aux extrémités

D'après les différents diagrammes en haut :

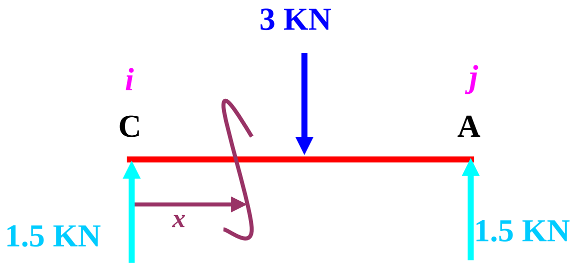
Au point A : $M_A = 0$
Au point C : $M_C = 3.54 - 4.5 = -0.96$ KN.m
Au point D : $M_D = 3.54 + 1.44 - 4.5 = 0.48$ KN.m

7-2- Etude des différents efforts

D'après la formule générale des moments internes et externes on a trouvés:

$$\begin{cases} T(x) = t(x) + \left(\dfrac{M_j - M_i}{L}\right) \\ M(x) = m(x) + M_i + \left(\dfrac{M_j - M_i}{L}\right)x \end{cases}$$

Barre AC :



$0 \le x < 1.5m$

$t(x) = 1.5$

$m(x) = 1.5x$

$$T(x) = 1.5 + \frac{0-(-0.96)}{3} = 1.82KN$$

$$M(x) = 1.5x + (-0.96) + \frac{0-(-0.96)}{3}x$$

$$M(x) = 1.82x - 0.96 \begin{cases} M(0) = -0.96KN.m \\ M(1.5) = 1.77KN.m \\ M(x) = 0 \Rightarrow x = 0.53m \end{cases}$$

$1.5 \le x < 3m$

$t(x) = 1.5 - 3 = -1.5$

$m(x) = 1.5x - 3(x - 1.5)$

$$T(x) = -1.5 + \frac{0-(-0.96)}{3} = -1.18KN$$

$$M(x) = 1.5x - 3(x-1.5) + (-0.96) + \frac{0-(-0.96)}{3}x$$

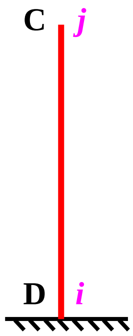
$$M(x) = -1.18x + 3.54 \begin{cases} M(1.5) = 1.77KN.m \\ M(3) = 0 \end{cases}$$

Poteau CD :

$$0 \le x < 3m$$
$$t(x) = 0$$

$$m(x) = 0$$

Dans ce cas, m(x) et t(x) sont déterminés sous chargement externe. Il n'y a aucun chargement dans le poteau. Donc, les réactions sont égales à 0



$$T(x) = 0.48 + \left(\frac{-0.96 - (0.48)}{3} \right) = -0.48KN$$

$$M(x) = 0.48 + \left(\frac{-0.96 - (0.48)}{3} \right) x$$

$$M(x) = -0.48x + 0.48 \begin{cases} M(0) = 0.48KN.m \\ M(3) = -0.96KN.m \\ M(x) = 0 \Rightarrow x = 1m \end{cases}$$

*Diagramme du moment fléchissant

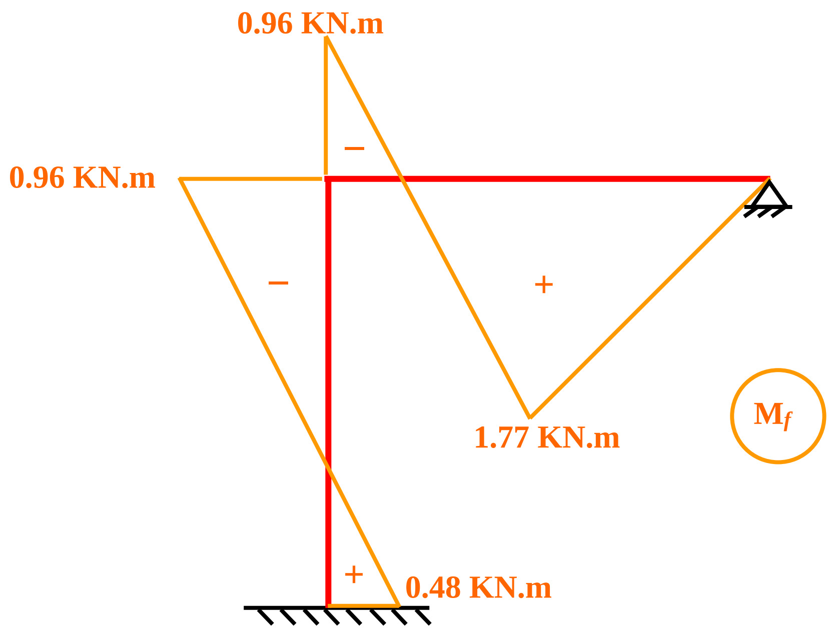
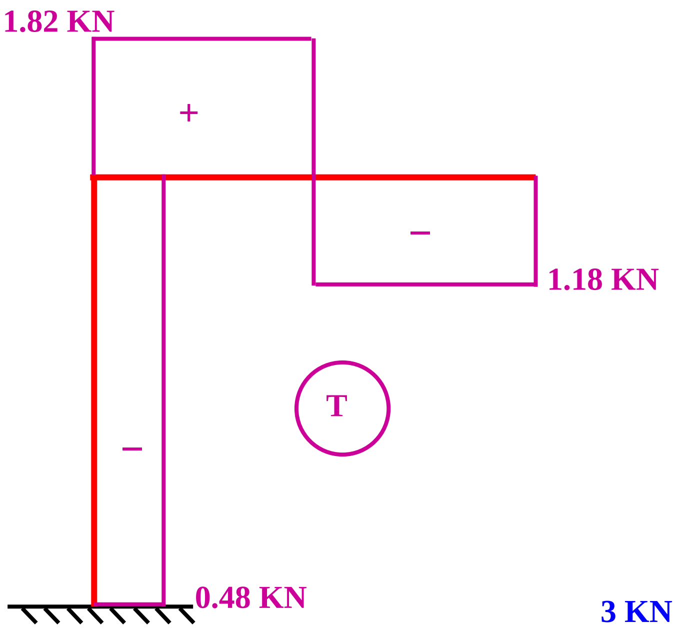
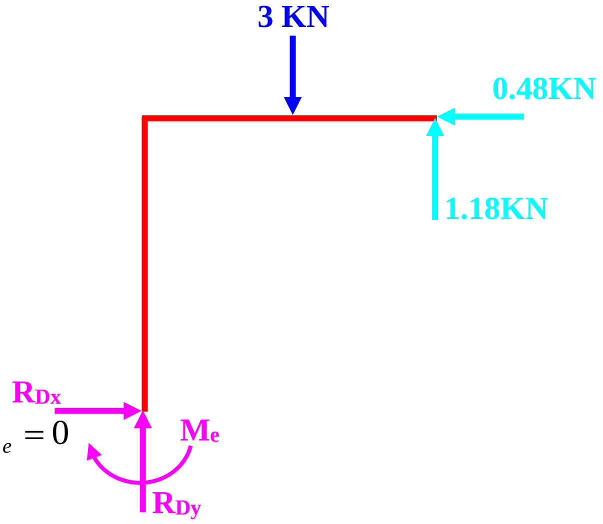


*Diagramme de l'effort tranchant





Les réactions à l'encastrement sont

$$\Sigma F_{/X} = 0 \Rightarrow R_{D_x} = 0.48KN$$

$$\Sigma F_{/Y} = 0 \Rightarrow R_{D_y} = -1.18 + 3 = 1.82KN$$

$$\Sigma M_{/D} = 0 \Rightarrow 1.18\times 3 + 0.48\times 3 - 3\times 1.5 - M_e = 0$$

$$\Rightarrow M_e = 0.48KN.m$$

*Diagramme de l'effort normal

Poteau ; $R_{D_y} + N = 0 \Rightarrow N(x) = -1.82KN$

Barre ; $R_{Dx} + N = 0 \Rightarrow N(x) = -0.48KN$